Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 1

Mardi 10 mai 2016 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[120 points]**.

2216 – 7219

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Le système d'équations suivant représente trois plans dans l'espace.

$$\begin{gathered} x + 3y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 15 \\ 2x + y - z = 6 \end{gathered}$$

Trouvez les coordonnées du point d'intersection des trois plans.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Note maximale : 5]

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en dessinant clairement et en indiquant les équations de toute asymptote ainsi que les coordonnées de tout point d'intersection avec les axes.

3. [Note maximale : 5]

(a) Montrez que $\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. [1]

(b) À partir de là, trouvez $\int_{\tan\alpha}^{\cot\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. [4]

4. [Note maximale : 6]

La fonction f est définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Hayley émet la conjecture $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{f'(x_2) + f'(x_1)}{2}$, $x_1 \neq x_2$.

Montrez que la conjecture de Hayley est correcte.

5. [Note maximale : 8]

Une pièce de monnaie biaisée est lancée cinq fois. La probabilité d'obtenir face lors d'un quelconque lancer est p.

Soit X le nombre de faces obtenues.

(a) Trouvez, en fonction de p, une expression pour $\mathrm{P}(X=4)$. [2]

(b) (i) Déterminez la valeur de p pour laquelle $\mathrm{P}(X=4)$ est un maximum.

(ii) Pour cette valeur de p, déterminez le nombre espéré de faces. [6]

6. [Note maximale : 8]

Considérez le développement de $(1+x)^n$ en puissances croissantes de x, où $n \geq 3$.

(a) Écrivez les quatre premiers termes du développement. [2]

Les coefficients du deuxième, troisième et quatrième termes du développement sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

(b) (i) Montrez que $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.

(ii) À partir de là, trouvez la valeur de n. [6]

7. [Note maximale : 6]

A et B sont des événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = p$, $p \neq 0$.

(a) Montrez que $\mathrm{P}(A \cup B) = 2p - p^2$. [2]

(b) Trouvez $\mathrm{P}(A \mid A \cup B)$ sous sa forme la plus simple. [4]

8. [Note maximale : 8]

Utilisez la récurrence pour prouver que $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 6 pour $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. [Note maximale : 8]

Considérez l'équation $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2},\ 0<x<\frac{\pi}{2}$. Étant donné que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(a) vérifiez que $x=\frac{\pi}{12}$ est une solution de l'équation ; [3]

(b) à partir de là, trouvez l'autre solution de l'équation pour $0<x<\frac{\pi}{2}$. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 18]

L’équation d’une droite L est $\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z-1$, où $p, q \in \mathbb{R}$.

L’équation d’un plan Π est $x + y + 3z = 9$.

(a) Montrez que L n’est pas perpendiculaire à Π. [3]

(b) Étant donné que L se trouve dans le plan Π, trouvez la valeur de p et la valeur de q. [4]

Considérez le cas différent où l’angle aigu entre L et Π est θ, où $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

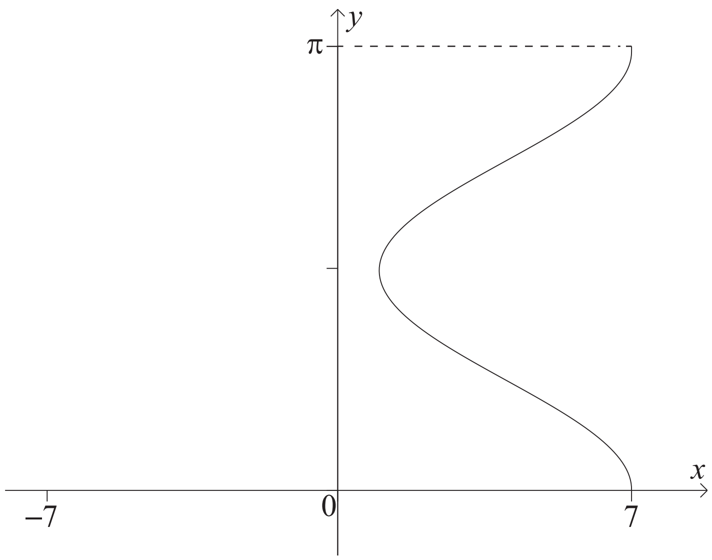
(c) (i) Montrez que $p = -2$.

(ii) Si L coupe Π en $z = -1$, trouvez la valeur de q. [11]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 19]

La représentation graphique suivante illustre la relation $x = 3\cos 2y + 4,\ 0 \le y \le \pi$.



La courbe subit une rotation de 360° autour de l’axe des ordonnées $\mathrm{O}y$ pour former un volume de révolution.

(a) Calculez la valeur du volume généré. [8]

Un récipient ayant cette forme est fabriqué avec une base solide de diamètre égal à $14\,\text{cm}$. Le récipient est rempli d’eau à un taux de $2\,\text{cm}^3\,\text{min}^{-1}$. Au temps *t* minutes, la profondeur de l’eau est de $h\,\text{cm}$, $0 \le h \le \pi$ et le volume d’eau dans le récipient est de $V\,\text{cm}^3$.

(b) (i) Étant donné que $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \pi(3\cos 2h + 4)^2$, trouvez une expression pour $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

(ii) Trouvez la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ lorsque $h = \dfrac{\pi}{4}$. [4]

(c) (i) Trouvez $\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$.

(ii) Trouvez les valeurs de h pour lesquelles $\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

(iii) En faisant référence de façon spécifique à la forme du récipient, interprétez $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ aux valeurs de h trouvées dans la partie (c)(ii). [7]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 23]

Soit $w = \cos\frac{2\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$.

(a) Vérifiez que w est une racine de l’équation $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. [3]

(b) (i) Développez $(w-1)\left(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right)$.

(ii) À partir de là, déduisez que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$. [3]

(c) Écrivez les racines de l’équation $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ en fonction de w et placez les points correspondant à ces racines sur un diagramme d’Argand. [3]

Considérez l’équation du second degré $z^2 + bz + c = 0$, où $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Les racines de cette équation sont α et α^*, où α^* est le conjugué de α.

(d) (i) Étant donné que $\alpha = w + w^2 + w^4$, montrez que $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.

(ii) Trouvez la valeur de b et la valeur de c. [10]

(e) En utilisant les valeurs de b et c obtenues dans la partie (d)(ii), trouvez la partie imaginaire de α, en donnant votre réponse sous la forme d’un nombre irrationnel. [4]

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.